Topología I
Examen I

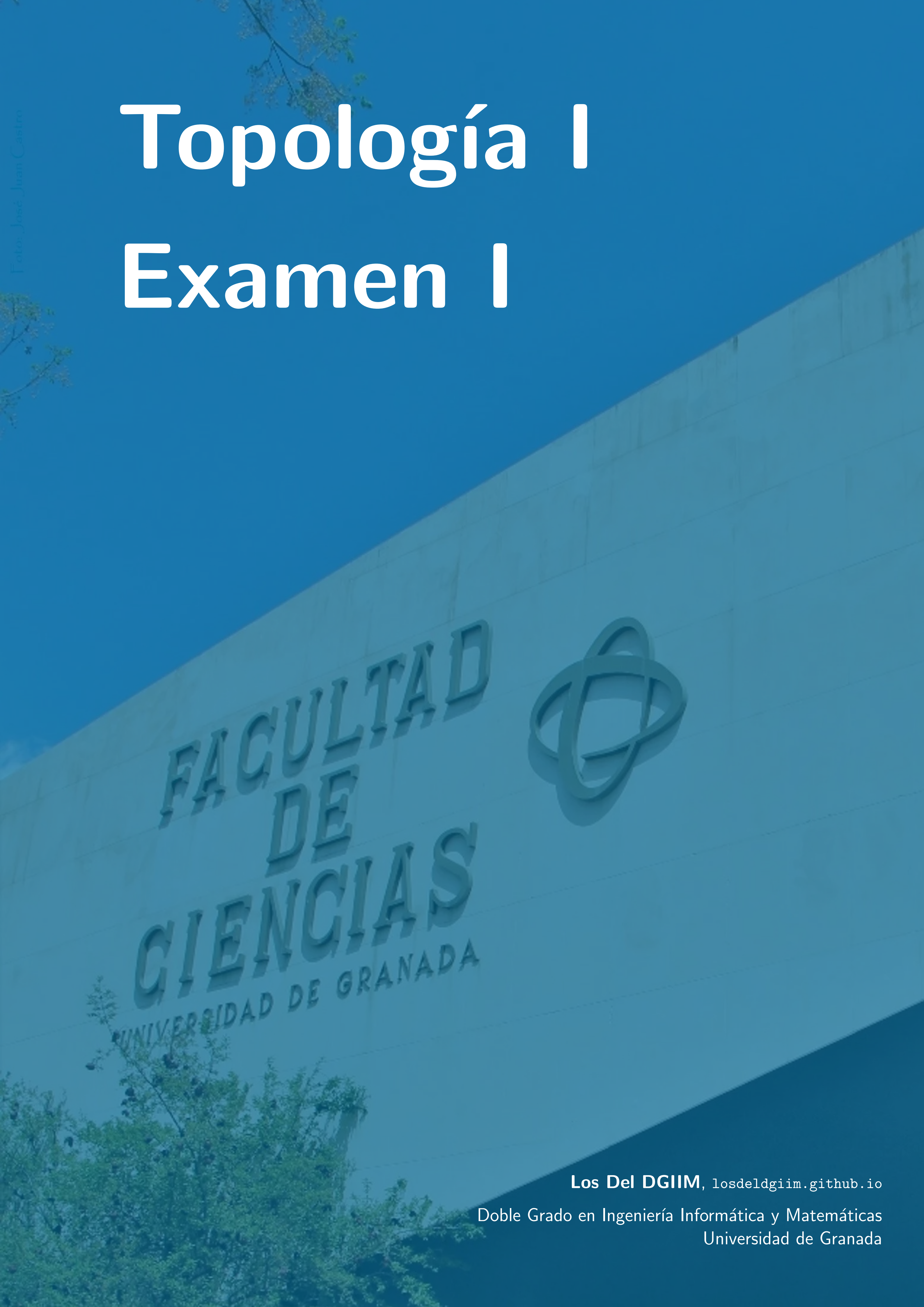

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Topología I
Examen I

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023-2024

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2023-24.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón López.

Descripción Parcial del Tema 1.

Fecha 10 de noviembre de 2023.

Duración 60 minutos.

Ejercicio 1 (4 puntos)**.** Demuestra que el primer axioma de separación y el primer axioma de numerabilidad son hereditarios.

Ejercicio 2 (6 puntos)**.** En el conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ de los números naturales, se consideran las siguientes topologías:

$$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{[n, +\infty[\, \cap \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{[1, n] \cap \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, determinar la base de entornos de n más económica posible (es decir, la que tenga menor cantidad de entornos posible), en ambas topologías.

   Dado $n \in \mathbb{N}$, veamos que una base de entornos de n en $\mathcal{T}_1$ es:
   $$\beta_n^1 = \{[n, +\infty[\, \cap \mathbb{N}\} = \{\{n, n+1, \dots\}\}$$
   En primer lugar, es directo ver que como $n \in [n, +\infty[\, \cap \mathbb{N} \in \mathcal{T}_1$, entonces β_n^1 está formada por un entorno de n. Sea ahora otro entorno N de n. Entonces, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $n \in [m, +\infty[\, \cap \mathbb{N} \subset N$. Como $n \in [m, +\infty[$, entonces $n \geqslant m$, por lo que $[n, +\infty[\, \subset [m, +\infty[$, y por tanto $[n, +\infty[\, \cap \mathbb{N} \subset [m, +\infty[\, \cap \mathbb{N} \subset N$.

   Veamos ahora que una base de entornos de n en $\mathcal{T}_2$ es:
   $$\beta_n^2 = \{[1, n] \cap \mathbb{N}\} = \{\{1, 2, \dots, n\}\}$$
   En primer lugar, es directo ver que como $n \in [1, n] \cap \mathbb{N} \in \mathcal{T}_2$, entonces β_n^2 está formada por un entorno de n. Sea ahora otro entorno N de n. Entonces, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $n \in [1, m] \cap \mathbb{N} \subset N$. Como $n \in [1, m]$, entonces $n \leqslant m$, por lo que $[1, n] \subset [1, m]$, y por tanto $[1, n] \cap \mathbb{N} \subset [1, m] \cap \mathbb{N} \subset N$.

2. Calcula el interior, la adherencia y la frontera del conjunto $B = \{1, 3, 5\}$ en ambas topologías.

   Calculamos primero el interior de B en $\mathcal{T}_1$. En primer lugar, sabemos que $\emptyset \subset B^\circ \subset B$. Además, como $B^\circ \in \mathcal{T}_1$, y los abiertos de dicha topología son $\emptyset$ y conjuntos no acotados superiormente, entonces $B^\circ = \emptyset$.

   Calculamos ahora la adherencia de B en $\mathcal{T}_1$. En primer lugar, sabemos que $B \subset \overline{B} \subset \mathbb{N}$. Además, como $\overline{B} \in C_{\mathcal{T}_1}$, entonces $\overline{B} = [1, n] \cap \mathbb{N}$ para $n \geqslant 5$. Como $\overline{B}$ es el menor cerrado que contiene a B, entonces $\overline{B} = [1, 5] \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Por tanto, en $\mathcal{T}_1$ tenemos que:
   $$\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

   Calculamos ahora el interior de B en $\mathcal{T}_2$. En primer lugar, sabemos que por las propiedades del interior $\emptyset \subset B^\circ \subset B$. Además, como $B^\circ \in \mathcal{T}_2$, y los abiertos de dicha topología son $\emptyset$ y los conjuntos de números naturales sucesivos, entonces $B^\circ = \{1\}$.

   Calculamos ahora la adherencia de B en $\mathcal{T}_2$. En primer lugar, sabemos que $B \subset \overline{B} \subset \mathbb{N}$. Además, como $\overline{B} \in C_{\mathcal{T}_2}$, entonces $\overline{B} = [n, +\infty[\, \cap \mathbb{N}$ para $n \leqslant 1$. Como $n \in \mathbb{N}$, entonces $\overline{B} = \mathbb{N}$ (tenemos entonces que B es denso). Por tanto, en $\mathcal{T}_2$ tenemos que:
   $$\partial B = \overline{B} \setminus B^\circ = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

3. Sea $A \subset \mathbb{N}$ el conjunto de los números impares. Calcula el interior, la adherencia, y la frontera del conjunto $B = \{1, 3, 5\}$ en A con la topología inducida por cada una de las topologías.

   Tenemos que $B = [1, 5] \cap A$. Por tanto, tenemos que $B \in C_{\mathcal{T}_1|_A}$, por lo que $\overline{B}^A = B$. Respecto al interior de B en A con la topología inducida por $\mathcal{T}_1$, sabemos que $\emptyset \subset B^{\circ_A} \subset B$. Además, como $B^{\circ_A} \in \mathcal{T}_1|_A$, y los abiertos de dicha topología son $\emptyset$ y conjuntos de impares no acotados superiormente, entonces $B^{\circ_A} = \emptyset$.

   Por tanto, en A con la topología inducida por $\mathcal{T}_1$ tenemos que:

   $$\partial_A B = \overline{B}^A \setminus B^{\circ_A} = B \setminus \emptyset = B$$

   Como $B = [1, 5] \cap A$, entonces $B \in \mathcal{T}_2|_A$, por lo que $B^{\circ_A} = B$. Respecto a la adherencia de B en A con la topología inducida por $\mathcal{T}_2$, sabemos que $B \subset \overline{B}^A \subset A$. Además, como $\overline{B}^A \in C_{\mathcal{T}_2|_A}$, entonces $\overline{B}^A = [n, +\infty[\cap A$ para $n \leqslant 1$. Como $n \in A$, entonces $\overline{B}^A = A$ (tenemos entonces que B es denso). Por tanto, en A con la topología inducida por $\mathcal{T}_2$ tenemos que:

   $$\partial_A B = \overline{B}^A \setminus B^{\circ_A} = A \setminus B = \{7, 9, 11, \dots\}$$

4. Determina si alguna de las topologías cumple alguno de los axiomas de separación.

   Veamos que ninguna de las topologías cumple el axioma T1, por lo que tampoco cumplirán el axioma T2. Para ello, consideramos los puntos 1 y 2.

   Para demostrar que $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_1)$ no cumple el axioma T1, buscamos $U \in \mathcal{T}_1$ tal que $1 \in U$ y $2 \notin U$. Como $1 \in U$, $U = \mathbb{N}$. Pero entonces $2 \in U$, por lo que no existe tal U.

   Para demostrar que $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_2)$ no cumple el axioma T1, buscamos $U \in \mathcal{T}_2$ tal que $2 \in U$ y $1 \notin U$. Como $2 \in U$, $U = [1, n] \cap \mathbb{N}$ para algún $n \geqslant 2$. Pero entonces $1 \in U$, por lo que no existe tal U.